Μαθημα 23ο 10/1/2017

Πιθανοτητες

Ασκησεις Επαναληψης!

Ασκηση 1:

Εστω τ.μ X με σ.π.π

$$f_X(x) = \begin{cases} a(1-x^2) & , -1 \le x \le 1 \quad , a>0 \\ 0 & , \text{αλλου} \end{cases}$$

α) Σταθερα $a = ?$ α.σ.κ της τ.μ X

β) $P(X>0) - f_X$, $P\left(-\frac{1}{2} < X < \frac{1}{2}\right) - F_X$, $P\left(X > -\frac{1}{2} \mid X < \frac{1}{2}\right)$

$A = \{X > 0\}$ και $B = \left\{-\frac{1}{2} \le X \le \frac{1}{2}\right\}$ ειναι ανεξ;

γ) $E(X) = ?$

απαντηση

α) Ιδιοτητες της f_X

① $f_X \geq 0$ ② $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,dx = 1$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,dx = 1 \Rightarrow \int_{-1}^{1} f_X(x)\,dx = 1 \Rightarrow \int_{-1}^{1} a(1-x^2)\,dx = 1 \Rightarrow$$

$$a\int_{-1}^{1} dx - a\int_{-1}^{1} x^2\,dx = 1 \Rightarrow a[x]_{-1}^{1} - a\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} = 1 \Rightarrow$$

$$a(1+1) - a\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\right) = 1 \Rightarrow 2a - \frac{2}{3}a = 1 \Rightarrow 6a - 2a = 3 \Rightarrow$$

$$4a = 3 \Rightarrow a = 3/4$$

Αρα η σταθερα $a = 3/4$

Συνοπτικά έχουμε:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{3}{4}(1-x^2), & -1 \le x \le 1 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

β) Θα βρούμε την F_X

$$F_X(x) := P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις

- για $x < -1$

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt = \int_{-\infty}^{x} 0\,dt = 0$$

- για $-1 \le x < 1$

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt = \int_{-\infty}^{-1} \cancelto{0}{f_X(t)\,dt} + \int_{-1}^{x} f_X(t)\,dt = \int_{-1}^{x} f_X(t)\,dt =$$

$$= \int_{-1}^{x} \frac{3}{4}(1-t^2)\,dt = \frac{3}{4}\int_{-1}^{x} dt - \frac{3}{4}\int_{-1}^{x} t^2\,dt =$$

$$= \frac{3}{4}\left[t\right]_{-1}^{x} - \frac{3}{4}\left[\frac{t^3}{3}\right]_{-1}^{x} = \frac{3}{4}(x+1) - \frac{3}{4}\left(\frac{x^3}{3} + \frac{1}{3}\right) =$$

$$= \frac{3}{4}x + \frac{3}{4} - \frac{1}{4}x^3 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}x - \frac{1}{4}x^3 + \frac{1}{2}$$

- για $1 \le x$

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt = \int_{-\infty}^{-1} \cancelto{0}{f_X(t)\,dt} + \int_{-1}^{1} f_X(t)\,dt + \int_{1}^{x} \cancelto{0}{f_X(t)\,dt} = \int_{-1}^{1} f_X(t)\,dt =$$

$$= \int_{-1}^{1} \frac{3}{4}(1-t^2)\,dt = \frac{3}{4}\int_{-1}^{1} dt - \frac{3}{4}\int_{-1}^{1} t^2\,dt = \frac{3}{4}\left[t\right]_{-1}^{1} - \frac{3}{4}\left[\frac{t^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \ldots = 1$$

Άρα συνοπτικά έχουμε

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < -1 \\ \frac{3}{4}x - \frac{1}{4}x^3 + \frac{1}{2} & , \quad -1 \le x \le 1 \\ 1 & , \quad x > 1 \end{cases}$$

- $P(X > 0) = \int_0^{+\infty} f_X(x)\,dx = \int_0^1 \frac{3}{4}(1-x^2)\,dx = \frac{3}{4}\int_0^1 dx - \frac{3}{4}\int_0^1 x^2 dx =$

$= \frac{3}{4}[x]_0^1 - \frac{3}{4}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{3}{4}(1-0) - \frac{3}{4}\left(\frac{1}{3} - \frac{0}{3}\right) =$

$= \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$. Άρα $P(X > 0) = \frac{1}{2}$

- $P\left(-\frac{1}{2} < X < \frac{1}{2}\right) = F_X\left(\frac{1}{2}\right) - F_X\left(-\frac{1}{2}\right) = \dots = \frac{11}{16}$

- $P\left(X > -\frac{1}{2} \mid X < \frac{1}{2}\right) = \dfrac{P\left(\{X > -\frac{1}{2}\} \cap \{X < \frac{1}{2}\}\right)}{P\left(X < \frac{1}{2}\right)} =$

$= \dfrac{P\left(-\frac{1}{2} < X < \frac{1}{2}\right)}{P\left(X < \frac{1}{2}\right)} = \dfrac{\frac{11}{16}}{F_X\left(\frac{1}{2}\right)} = \dots = \frac{22}{27}$

Για να είναι τα A, B ανεξάρτητα θα πρέπει να ισχύει
$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

$P(A) = P(X > 0) = \frac{1}{2}$, $P(B) = P\left(-\frac{1}{2} < X < \frac{1}{2}\right) = \frac{11}{16}$

$P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{11}{16} = \frac{11}{32}$

$P(A\cap B) = P(X>0$ και $-\frac{1}{2} \le X \le \frac{1}{2}) = P(0 < X \le \frac{1}{2}) =$

$= F_X(\frac{1}{2}) - F_X(0) = \frac{11}{32}$

Άρα $P(A\cap B) = \frac{11}{32} = P(A)\cdot P(B)$ δηλαδή τα A, B είναι ανεξάρτητα.

γ) $E(X) \overset{\text{ορ}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)\, dx = \int_{-1}^{1} x \cdot \frac{3}{4}(1-x^2)\, dx =$

$= \int_{-1}^{1} \frac{3}{4} x\, dx - \int_{-1}^{1} \frac{3}{4} x^2\, dx = 0$

extra ερώτημα (δ) που μπορεί να μπει
Να βρεθεί η κατανομή $Y = g(X)$

Άσκηση 2

α)

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \le -1 \\ \frac{(x+1)^2}{2}, & -1 < x < 0 \\ \frac{1}{2} + x - \frac{x^2}{2}, & 0 \le x < 1 \\ 1, & x \geq 1 \end{cases}$$

i) Ποιες ιδιότητες πρέπει να ικανοποιεί η F_X ώστε να είναι σ.δ.κ;

ii) σ.π.π ?

iii) $P(|X| \le \frac{1}{2}) - F_X$, $P(0 < X \le \frac{3}{2}) - f_X$

iv) $E(X) = ;$

β) $f_X(x) = \begin{cases} x^2/9, & 0 \le x \le 3 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$

$Y = X^3$

Λυση

i) Θα πρεπει για να ειναι α.σ.κ

α) F_x αυξουσα

β) Συνεχης απο δεξια

γ) $\lim_{x \to -\infty} F_x(x) = 0$ και $\lim_{x \to +\infty} F_x(x) = 1$

ii) $f_x(x) = \frac{d}{dx} F_x(x)$

Διακρινω τις περιπτωσεις

- για $x \le -1$

$\frac{d}{dx}(0)$

- για $-1 < x < 0$

$\frac{d}{dx}\left(\frac{(x+1)^2}{2}\right)$

- για $0 \le x < 1$

$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2} + x - \frac{x^2}{2}\right)$

- για $x \geq 1$

$\frac{d}{dx}(1)$

Συνοπτικα εχουμε:

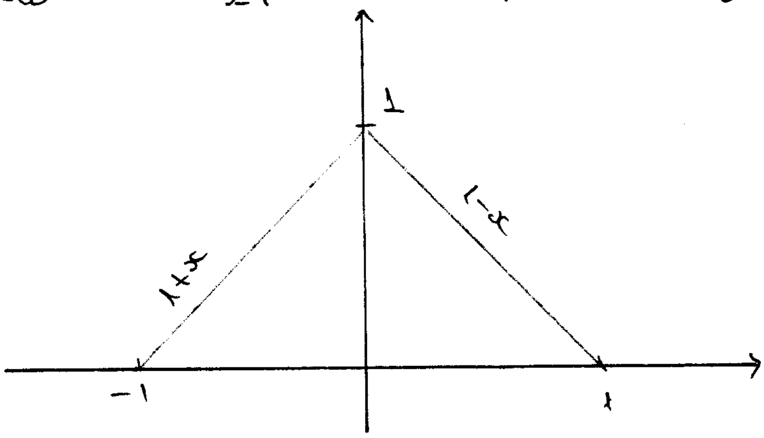
$$f_x(x) = \begin{cases} 0, & x \le -1 \\ x+1, & -1 < x < 0 \\ 1-x, & 0 \le x < 1 \\ 0, & x \geq 1 \end{cases} = \begin{cases} 1+x, & -1 < x < 0 \\ 1-x, & 0 \le x < 1 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} 1-|x|, & -1 < x < 1 \\ 0, & \text{αλλου} \end{cases}$$ Τριγωνική κατανομη

iv) $E(X)=0$

γιατι ειναι συμμετρικη και συνεχης

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_X(x)\,dx = \int_{-1}^{1} x\, f_X(x)\,dx = \int_{-1}^{0} x(1+x)\,dx + \int_{0}^{1} x(1-x)\,dx = \dots = 0$$



iii) • $P\left(|X| \le \frac{1}{2}\right) = P\left(-\frac{1}{2} \le X \le \frac{1}{2}\right) = F_X\left(\frac{1}{2}\right) - F_X\left(-\frac{1}{2}\right) = \dots = \frac{3}{4}$

• $P\left(0 < X \le \frac{3}{2}\right) = \int_{0}^{3/2} f_X(x)\,dx = \int_{0}^{1} (1-x)\,dx + \int_{1}^{3/2} 0\,dx =$

$$= \int_{0}^{1} (1-x)\,dx = \dots = \frac{1}{2}$$

Ερωτημα extra που μπορει να μπει..

ποια η 3η ροπη,

Διακυμανση;

↳ $Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x)\,dx = \dots$

β) Μεθοδος μετασχηματισμου

Θεωρω το μετασχηματισμο $y = g(x) = x^3 \quad \forall\, 0 \le x \le 3$

Τιμες Y: $y \in (0, 27]$

Ειναι η g 1-1;

Ναι, γιατι η g ειναι γν. αυξουσα στο $(0,3]$

Εφοσον γν. αυξουσα $\exists\, g^{-1}$:

$$x = g^{-1}(y) = y^{1/3} \qquad 0 \le y \le 27$$

$$\frac{d}{dy} g^{-1}(y) = \frac{d}{dy} y^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} y^{\frac{1}{3}-1} = \frac{1}{3} y^{-2/3} \quad , 0 < y \le 27$$

Παρατηρω οτι $\frac{d}{dy} g^{-1}(y) \neq 0$ και συνεχης για $0 < y \le 27$

Αρα η σ.π.π

$$f_Y(y) = f_X(g^{-1}(y)) \left| \frac{d}{dy} g^{-1}(y) \right| = \frac{|y^{\frac{1}{3}}|^2}{9} \left| \frac{1}{3} y^{-2/3} \right| =$$

$$= \frac{1}{27} \quad , 0 < y \le 27$$

Αρα η σ.π.π

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{27} & , 0 < y \le 27 \\ 0 & , \text{αλλου} \end{cases}$$

Ελεγχος $\rightarrow$ $f_Y(y) \ge 0$, $\int_{-\infty}^{+\infty} f_Y(y)\,dy = 1$ $\Big\}$ Ισχυουν αρα ειμαστε σωστοι

Αναγνωριση της f_Y?

Ειναι ομοιομορφη στο $(0,27)$ δηλ $U(0,27)$